КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АЛЬ-ФАРАБИ

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕПЛОФИЗИКИ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

3D моделирование физических процессов

Явная схема

Лектор: PhD
Максимов Валерий Юрьевич

СХЕМА “ЯВНЫЙ УГОЛОК” ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОНВЕКТИВНОГО ПЕРЕНОСА

Рассмотрим модельное уравнение только с конвективным членом

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

Когда мы рассматривали явление неустойчивости, то видели, что конвективный член (если его записывать через центральной разности) приводит к неустойчивости. Поэтому для пространственных переменных используют односторонние разности следующем образом.

$$\frac{f_{i,n+1} - f_{i,n}}{\Delta t} = -u\frac{f_{i,n} - f_{i-1,n}}{\Delta x} \qquad \text{при} \quad u \succ 0$$

$$\frac{f_{i,n+1} - f_{i,n}}{\Delta t} = -u\frac{f_{i+1,n} - f_{i,n}}{\Delta x} \qquad \text{при} \quad u \prec 0$$

Рассмотрим случай $u \succ 0$

$$\frac{f_{i,n+1} - f_{i,n}}{\Delta t} + \frac{f_{i,n} - f_{i-1,n}}{\Delta x} = 0$$

или $$\boxed{f_{i,n+1} = f_{i,n} - c\left(f_{i,n} - f_{i-1,n}\right)} \quad (*)$$

Воспользуемся разложением Тейлора, чтобы привести это КРУ к данному уравнению

$$f_{i,n+1} = f_{i,n} + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta t^2$$

$$f_{i,n+1} - f_{i,n} = \Delta t\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta t^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

$$f_{i-1,n} = f_{i,n} - \frac{\partial f}{\partial t}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Delta x^2$$

$$f_{i,n} - f_{i-1,n} = \Delta x\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta x^2\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

поставим полученные выражения в уравнение (*):

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{1}{2}\Delta t\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+u\,\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{2}u\Delta x\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\,\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}u\Delta x\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\Delta t\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Выразим $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ через $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ воспользовавшись уравнением:

$$\frac{df}{dt}=0\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial t}=-u\,\frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(-u\frac{\partial f}{\partial x}\right)=-u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)=-u\frac{\partial}{\partial x}\left(-u\frac{\partial f}{\partial x}\right)=u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}u\Delta x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\Delta t u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}=\underbrace{\frac{1}{2}u\Delta x(1-c)}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Схемная искусственная диффузия или аппроксимационный коэффициент диффузии - a_c

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}=a_c\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\boxed{\alpha_\Delta=a_c\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$$

- ошибка аппроксимации

Т.о. мы видим, что полученное по схеме “явный уголок” КРУ эквивалентно не исходному данному уравнению, а уравнению с дополнительным диффузионным членом.

Из выражения a_c следует, что при $c=1$ (предельное условие устойчивости) $a_c=0$.

Уменьшение Δt приводит к увеличению a_c

Следовательно, увеличивается ошибка аппроксимации

$$\boxed{a_c = \frac{1}{2} u \Delta x (1 + c)}$$

Для схемы с $u \prec 0$

в этом случае $a_c \neq 0$ ни при каком c, т.е. эта схема обладает более сильным диссипативным действием.

НЕЯВНЫЕ СХЕМЫ

Если при аппроксимации пространственных производных брать значение функций не на **n-ном** временном слое, а на ***n+1***, то получим полностью неявную схему:

$$\frac{f_{i,n+1}-f_{i,n}}{\Delta t}+u\,\frac{f_{i+1,n+1}-f_{i-1,n+1}}{2\Delta x}=$$

$$=a\,\frac{f_{i+1,n+1}+f_{i-1,n+1}-2f_{i,n+1}}{\Delta x^{2}} \qquad (1)$$

Теперь уже нельзя выразить значение $f_{i,n+1}$ явно через значения на предыдущих временных слоях.

Для определения $f_{i,n+1}$ необходимо решить систему уравнений.

АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПО НЕЯВНОЙ СХЕМЕ

Перепишем конечно-разностные уравнение следующем образом:

$$f_{i,n+1} - f_{i,n} + \frac{u\Delta t}{2\Delta x}\left(f_{i+1,n+1} - f_{i-1,n+1}\right) = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2}\left(f_{i+1,n+1} + f_{i-1,n+1} - 2f_{i,n+1}\right)$$

$$(1+2d)f_{i,n+1} + \left(\frac{c}{2} - d\right)f_{i+1,n+1} - \left(\frac{c}{2} + d\right)f_{i-1,n+1} = f_{i,n} \qquad (2)$$

$$\underbrace{\left(-\frac{c}{2} - d\right)}_{A_i} f_{i-1,n+1} + \underbrace{(1+2d)}_{B_i} f_{i,n+1} + \underbrace{\left(\frac{c}{2} - d\right)}_{C_i} f_{i+1,n+1} = \underbrace{f_{i,n}}_{D_i} \qquad (3)$$

Выразим $$f_{i,n+1} = \underbrace{-\frac{C_i}{B_i}}_{P_i} f_{i+1,n+1} + \underbrace{\frac{D_i - A_i f_{i-1,n+1}}{B_i}}_{Q_i} \qquad (4)$$

Прогоночные коэффициенты

Запишем уравнение (3) для точки i-1:

$$A_{i-1} f_{i-2,n+1} + B_{i-1} f_{i-1,n+1} + C_{i-1} f_{i,n+1} = D_{i-1}$$

Запишем уравнение (4) для точки i-1:

$$f_{i-1,n+1} = P_{i-1} f_{i,n+1} + Q_{i-1} \qquad (5)$$

Уравнение (4) и (5) подставим в уравнение (3):

$$A_i(P_{i-1} f_{i,n+1} + Q_{i-1}) + B_i f_{i,n+1} + C_i f_{i+1,n+1} = D_i$$

Найдем $f_{i,n+1}$

$$A_i P_{i-1} f_{i,n+1} + B_i f_{i,n+1} = D_i - C_i f_{i+1,n+1} - A_i Q_{i-1}$$

$$f_{i,n+1} = \underbrace{-\frac{C_i}{A_i P_{i-1} + B_i}}_{P_i} f_{i+1,n+1} + \underbrace{\frac{D_i - A_i Q_{i-1}}{A_i P_{i-1} + B_i}}_{Q_i} \qquad (6)$$

Сравните (6) с (4)

Напомним основные этапы прогонки.

1.Прямая прогонка: вычисляются прогоночные коэффициенты по формуле (6)

$$\mathrm{P}_{i,n+1} = \left[\frac{-C_i}{\mathrm{A}_i \mathrm{P}_{i-1} + \mathrm{B}_i} \right]_{n+1} \qquad Q_{i,n+1} = \left[\frac{D_i - A_i Q_{i-1}}{A_i P_{i-1} + \mathrm{B}_i} \right]_{n+1}$$

$$i = 2, L-1$$

2. Обратная прогонка: находятся все неизвестные значения функции по формуле (4)

$$f_{i,n+1} = \left[P_i f_{i+1} + Q_i \right]_{n+1} \qquad i = L-1, 2$$

Домашнее задание:

Исследуйте уравнение (1) на устойчивость методом фон Неймана